إختبار في مادة الرياضيات — المدة : 04 ساعات و 30 د

على الممتحن أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول:(04 نقاط)

1) p عدد طبيعي غير معدوم ، n عدد طبيعي غير معدوم و يختلف عن 1 .

a و b عددان طبيعيان حيث : $a=pn$ و $b=p(n-1)$.

- بيّن أنّ : $PGCD(a;b)=a-b$.

2) بيّن أنّه إذا كان a و b عددين طبيعيين غير معدومين حيث : $PGCD(a;b)=a-b$ فإنّه يوجد عددين طبيعيين n و p يحقّقان : $a=pn$ و $b=p(n-1)$.

3) x و y عددين طبيعيين غير معدومين .

نضع : $a=40x(3y+2)$ ، $b=15x(8y+5)$ ، $c=24x(5y+3)$.

- عيّن $PGCD(a;b)$ و $PGCD(b;c)$ ثمّ استنتج $PGCD(a;b;c)$.

التمرين الثاني:(04 نقاط)

يحتوي كيس على 5 كريات بيضاء و 5 كريات سوداء متماثلة لا نفرق بينها باللمس .

نسحب من الكيس n كرية على التوالي مع الإرجاع حيث n عدد طبيعي $(n\geq 2)$.

نعتبر الحوادث A : " نتحصل على كريات من اللونين " B : " نتحصل على كرية بيضاء على الأكثر "

C : " نتحصل على كريات من نفس اللون " D : " نتحصل على كرية بيضاء واحدة فقط "

1) أ) أحسب إحتمال الحادثتين C و D .

ب) بيّن أنّ : $P(A)=1-\dfrac{1}{2^{n-1}}$ ، $P(A\cap B)=\dfrac{n}{2^n}$ و $P(B)=\dfrac{n+1}{2^n}$.

2) بيّن أنّ : $\left[P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\right]$ يكافئ $\left[2^{n-1}=n+1\right]$.

3) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ المعرفة بـــ : من أجل $n\geq 2$ يكون $u_n=2^{n-1}-(n+1)$.

أ) أحسب كل من : u_2 ، u_3 و u_4 .

ب) بيّن أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ متزايدة تماما .

4) إستنتج قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون الحادثتان A و B مستقلتان .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

1) S تحويل نقطي يحول $M(z)$ إلى $M'(z')$ بحيث : $z'=-\left(\sqrt{3}+i\right)z-1+\left(1+\sqrt{3}\right)i$.

أ) عيّن صورة النقطة Ω ذات اللاحقة i بالتحويل S . ماذا تستنتج ؟ .

ب) ما طبيعة التحويل S ؟ . عيّن عناصرة المميزة .

2) نعرّف متتالية النقط (A_n) المعرفة بـــ : $\begin{cases} A_0\left(z_0=\dfrac{\sqrt{3}}{4}+i\,\dfrac{3}{4}\right) \\ A_{n+1}=S\left(A_n\right) \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$ نرمز إلى لاحقة A_n بالرمز z_n .

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإنّ : $z_n-i=2^n e^{i\left(\frac{7n\pi}{6}\right)}\left(z_0-i\right)$.

ب) إستنتج أنّه يوجد تشابه مباشر مركزه Ω و يحول A_0 إلى A_n يطلب تعيين نسبته و زاوية له .

ج) عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n التي من أجلها تكون النقط : Ω ، A_0 و A_n على استقامة واحدة .

3) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0=\Omega A_0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\Omega A_n$.

أ) برهن أنّ (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول و أساسها .

ب) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_0+u_3+u_6+......+u_{3n}$ ثمّ أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $\begin{cases} f(x)=(1-x)e^x \quad ; \quad x<1 \\ f(x)=(x-1)+\ln\left(\dfrac{2x}{x+1}\right) \quad ; \quad x\geq 1 \end{cases}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ الوحدة $1cm$.

I) 1) نقبل باستمرارية الدالة f عند $x_0=1$

أ) أدرس قابلية إشتقاق الدالة f على يسار x_0 .

ب) بيّن أنّ : $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{3}{2}$ ، ماذا تستنتج ؟ فسّر النتائج هندسيا .

2) أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

3) أ) بيّن أنّ المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له .

ب) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

ج) أنشئ المنحني (C_f) بدقة .

4) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=m(x-1)$.

II) نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (E).......... $y'-y=(-2x+1)e^{x}$ و لتكن الدالة g حل لها .

1) أ) بيّن أنّ كل دالة φ من الشكل : $\varphi(x)=e^{-x}g(x)$ تحقق $\varphi'(x)=-2x+1$ على $\mathbb{R}$.

ب) إستنتج حلا للمعادلة (E) الذي يأخذ القيمة 1 من أجل $x=0$.

2) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعتبر المتتالية (I_n) المعرفة بـــ : $I_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1(1-x)^n e^{x}dx$.

أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب I_n و فسره هندسيا .

ب) أوجد علاقة تراجعية تربط بين I_n و I_{n+1} .

ج) إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 2$: $I_n=e-1-\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$.

3) بيّن أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $\dfrac{1}{(n+1)!}\leq I_n\leq\dfrac{e}{(n+1)!}$ ثمّ استنتج : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$.

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع الثاني على 03 صفحات (من الصفحة 4 إلى الصفحة 6)

التمرين الأول:(04 نقاط)

ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

نعتبر النقطتين : $A\left(\frac{2}{3};-3;2\right)$ و $B\left(-\frac{4}{3};0;-4\right)$ و لتكن I منتصف القطعة $[AB]$. (S) سطح الكرة التي قطرها $[AB]$

1) أ) أحسب إحداثيات النقطة E مرجح النقطتين المثقلتين $(A;2)$ و $(B;1)$.

ب) أثبت أنّ مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MO}\right\|$ هي مستوي (P) يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له .

2) أ) أحسب المسافة بين I و المستوي (P) .

ب) أثبت أنّ (P) يقطع (S) وفق دائرة (C) معادلتها في المستوي (P) : $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=12$.

ج) إستنتج إحداثيات النقطة J مركز الدائرة (C) و نصف قطرها r .

3) لتكن $F\left(\sqrt{3}-\frac{1}{3};-1;2\right)$ نقطة من الدائرة (C) .

أ) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (T) الذي يمس (C) و (S) في النقطة F .

ب) عيّن إحداثيات النقطة K من المماس (T) حتى يكون حجم رباعي الوجوه $KIJF$ يساوي $\sqrt{3}\,u.v$.

التمرين الثاني:(04 نقاط)

1) N عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس 8 على الشكل $N=\overline{a740}$ و يكتب في نظام التعداد ذي الأساس 9 على الشكل $N=\overline{26b0}$ حيث a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

أ) عيّن قيمتي العددين الطبيعيين a و b حتى يقبل N القسمة على 72 .

ب) إستنتج كتابة العدد الطبيعي N في النظام العشري .

ج) تحقّق أنّ : $512a-9b=1464$.

2) نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y التالية : $(1)......512x-3y=1464$.

أ) حل المعادلة (1) .

ب) ما هي القيم الممكنة لـــ $PGCD(x;y)$ ؟ .

ج) أوجد حلول المعادلة (1) التي تحقق : $PGCD(x;y)=488$.

التمرين الثالث:(04 نقاط)

لتكن (z_n) متتالية أعداد مركبة معرفة بـــ : $\begin{cases} z_0 = e^{i\theta} \quad ; \quad \theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\\ z_{n+1} = z_n + |z_n| \end{cases}$.

1) بيّن أنّ : $e^{i\theta}+1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\times e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

2) نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـــ : $u_n = \arg(z_n)$ حيث : $u_n \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

- بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثمّ أكتب u_n بدلالة n و θ .

3) نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـــ : $v_n = z_n - \overline{z_n}$.

أ) أكتب v_{n+1} بدلالة v_n . ماذا تستنتج ؟ .

ب) بيّن أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $|z_n|\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \sin\theta$.

4) أحسب المجموع : $S_n = |z_0| + |z_1| + ... + |z_{n-1}|$.

5) إستنتج أنّ : $\cot ang\left(\frac{\theta}{2^n}\right) - \cot ang(\theta) = \frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + ... + \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$ و ذلك من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

التمرين الرابع:(08 نقاط)

I) n عدد طبيعي غير معدوم ، نعتبر f_n الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـــ : $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{(1+x)^n}$.

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدته $1cm$.

1) أ) أحسب نهايات الدالة f_n عند حدود مجال التعريف .

ب) أحسب $f_n'(x)$ و ادرس إشارتها .

ج) أنشئ جدول تغيرات الدالة f_n .

2) بيّن أنّ جميع المنحنيات (C_n) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها .

3) أ) أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) .

ب) أرسم بدقة و في نفس المعلم المنحنيين (C_1) و (C_2) .

II) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعتبر المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بـــ : $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

1) أكتب $f_n'(x)$ بدلالة $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$.

2) أ) بيّن أنّ المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متناقصة .

ب) إستنتج أنّ المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة .

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ و $0 \leq x \leq 1$ لدينا : $\frac{e^{-1}}{(1+x)^n} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{(1+x)^n}$.

ب) إستنتج أنّه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ لدينا : $\frac{e^{-1}}{n-1}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right] \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right]$.

ج) أحسب $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

4) أ) إعتمادا على السؤال $(1/\text{II})$ بيّن أنّ : $I_n + nI_{n+1} = 1 - \frac{e^{-1}}{2^n}$.

ب) إستنتج : $\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

ج) أحسب بـــ cm^2 مساحة الحيز المستوي A المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C_2) و المستقيمين $x=0$ و $x=1$.

إنتهى الموضوع الثاني